

# SOLUCIÓN SEMI-ANALÍTICA 1D PARA FUNCIONES UNIPARAMÉTRICAS DE REALCE

C. Platero Dueñas, J. Sanguino Botella, M.C. Tobar Puente, P.M. González Manchón

J.M. Poncela Pardo, G. Asensio Madrid

Grupo de Bioingeniería Aplicada de la Universidad Politécnica de Madrid

carlos.platero@upm.es, javier.sanguino@upm.es, pedro.gmanchon@upm.es, m.carmen.tobar@upm.es

josemanuel.poncela@upm.es gabriel.asensio@upm.es

## Resumen

*El proceso de realce resulta crucial en el análisis de imágenes. En esta contribución estudiamos el comportamiento numérico de filtros de difusión uniparamétricos que automaticen el estudio de estas imágenes. Para ello se propone la técnica de los tres píxeles que da lugar a una solución semi-analítica del proceso de difusión no lineal con una función de difusión uniparamétrica.*

**Palabras clave:** Difusión no lineal, ecuaciones en derivadas parciales, cálculo numérico.

## 1 INTRODUCCIÓN

Una parte fundamental en el manipulado de una imagen es la segmentación. Este procedimiento permite destacar los diferentes elementos que constituyen la imagen, con el objeto de facilitar su estudio. Como proceso previo, tanto para las técnicas de segmentación orientadas a regiones, a fronteras o a una combinación de ambas, es preciso un realce de los bordes y un suavizado de las distintas partes de la imagen (*denoising*). Este tratamiento previo, conlleva por tanto, una eliminación del ruido (inherente a la adquisición de la imagen) y un aumento del contraste (realce). Existen diferentes técnicas para abordar este proceso inicial. Un resumen del estado actual de estas técnicas puede encontrarse en Buades *et al*[5]. En este artículo se utilizarán procedimientos conectados con la ecuación de difusión no lineal, establecido inicialmente en el trabajo de Perona y Malik[11]. Este planteamiento consiste en obtener a partir de una imagen inicial  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , otra imagen  $u(\mathbf{x})$  como solución de una ecuación de difusión no lineal con condiciones de contorno de Neumann e iniciales (ver [2] y sus referencias):

$$\begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div} (g(\|\nabla u\|) \nabla u) & \mathbf{x} \in \Omega \quad t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{c.i.} \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \text{c.c.} \end{cases} \quad (1)$$

$g(\|\nabla u\|)$  es el *coeficiente de difusión*. Es una función no negativa y normalmente decreciente re-

specto al módulo del gradiente. La idea, por tanto, consiste en escoger un coeficiente de difusión adecuado en la ecuación de difusión no lineal, que transforme la Ecuación en Derivadas Parciales no sólo en un filtro de paso bajo (y de esta forma filtre los ruidos de la imagen) sino que localmente, también pueda evolucionar en un filtro de paso alto, con el objetivo de realzar los bordes. No obstante, las propiedades del filtrado de difusión no lineal quedan más claras si se plantean en un nuevo sistema de referencia ortonormal, en el que uno de los ejes venga determinado por la dirección y sentido de  $\boldsymbol{\eta} = \nabla u / \|\nabla u\|$  si  $\|\nabla u\| \neq 0$ , que junto con  $\boldsymbol{\xi}$  y  $\boldsymbol{\zeta}$  construyen la curva/superficie de nivel perpendicular a  $\boldsymbol{\eta}$ [2, 8, 17, 21, 13]. Entonces

$$\begin{aligned} \partial_t u = & g(\|\nabla u\|) (\partial_{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}} u + \partial_{\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}} u) + \\ & [g(\|\nabla u\|) + g'(\|\nabla u\|) \cdot \|\nabla u\|] \partial_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}} u \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\partial_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}} u$  representa la segunda derivada de  $u$  en la dirección de  $\boldsymbol{\eta}$ .

En el caso unidimensional, el proceso de realce queda ligado directamente con el incremento o decremento de las pendientes definidas por los píxeles contiguos. Esto hace que el coeficiente de  $\partial_{xx} u$  en (2) para  $n = 1$  sea

$$g(|\partial_x u|) + g'(|\partial_x u|) |\partial_x u| < 0 \quad (3)$$

Este razonamiento se generaliza a más dimensiones. En dos y tres dimensiones el coeficiente de  $\partial_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}} u$  en (2) es negativo[2, 18]. Sin embargo, el inconveniente de estos planteamientos reside en que el modelo continuo de realce conduce a un problema *mal propuesto*[9, 6, 2, 20]. Esta situación, en el caso discreto, puede cambiar bajo ciertas condiciones de los datos, dando lugar a soluciones convergentes tal y como se menciona en [6] y se analiza más concretamente en [20, 21].

Otro apartado importante del proceso de difusión no lineal consiste en la elección del coeficiente de difusión, de manera que permita establecer un proceso de *suavizado* en las regiones de bajo contraste y por otra parte, preserve o incremente las pendientes de los bordes, buscando su mantenimiento o realce. Habitualmente estas funciones de difusión contienen un parámetro de contraste  $\lambda$  con el cual se determina el umbral entre la difusión

y el realce, en particular los filtros de Perona-Malik[8, 11]. Esto plantea la necesidad de un ajuste previo *ad hoc* de estos parámetros internos para obtener un resultado óptimo. Para evitar esta situación, de una sintonización previa de los parámetros de contraste, no siempre directa, utilizaremos las siguientes funciones de difusión uniparamétricas[19, 4]:

$$g(\|\nabla u\|) = \frac{1}{\|\nabla u\|^p} \quad (4)$$

Esta familia de difusión tiene un buen comportamiento en los procesos de realce[12], pero tienen el inconveniente de la singularidad en las regiones uniformes. En esta comunicación, se pretende salvar parte de esta dificultad, siguiendo la línea de los trabajos de Brox[4] y Welk *et al*[23]. Así pues, el estudio se dividirá por una parte, en la introducción de la familia uniparamétrica de difusión, para continuar en la formulación semidiscreta. Posteriormente se habla de la manera de evitar la singularidad del sistema de ecuaciones, mediante la introducción de una función de regularización. Posteriormente se desarrollará un modelo semi-analítico llamado de *tres pixeles* que pretende englobar al ya introducido por [16, 4]. Esto permitirá prescindir de regularizaciones de la función de difusión y obtener una solución semi-analítica consistente con el problema semidiscreto. Para terminar se establecerá un esquema numérico discreto y se comparará con los métodos semi-implícitos [22] que utilizan la función de difusión uniparamétrica regularizada [12].

## 2 FILTRADO DE DIFUSIÓN NO LINEAL SIN PARÁMETROS DE CONTROL

Uno de los aspectos importantes de una función de difusividad TV[1] es la ausencia de parámetros de control. Sin embargo, esta ventaja resulta insuficiente pues no permite un aumento del realce de la imagen, debido a que el coeficiente  $\partial_{\eta\eta}u$  en (2) no es negativo. Recientemente se han considerado una familia de difusión de interés creciente que tampoco requiere de ajustes *ad hoc* [4, 19, 12].

$$g(\|\nabla u\|) = \frac{1}{\|\nabla u\|^p}; \mathbf{F}(u) = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|^p}; p \geq 0 \quad (5)$$

donde  $\mathbf{F}$  representa el campo generado por la función de difusión. Para  $p = 0$  coincide con la difusión lineal, con  $p = 1$  se corresponde con TV y  $p = 2$  con BFB (*Balance Forward Backward*) [8]. Dada esta función de difusión se trata de determinar cómo evoluciona el proceso difusivo dependiendo de  $p$ , del tiempo y del módulo del gradiente. Se pretende, por tanto, determinar las relaciones

entre el tiempo de difusión, el parámetro  $p$  y qué detalles difumina y qué otros realza. La búsqueda de un realce de la imagen implica que tanto en 1D como en más dimensiones, por generalización directa, requiera que el coeficiente  $\partial_{\eta\eta}u$  en (2) sea negativo[2]. Esto implica la condición  $p > 1$  en estas familias de difusión uniparamétricas.

Para la comprensión de la dinámica de este proceso difusivo sería deseable una solución analítica que permita comprender las relaciones entre el tiempo de difusión, la magnitud del gradiente y el valor de  $p$ . La búsqueda de una solución continua resulta difícil. En el caso unidimensional, el más simple, se puede apreciar fácilmente dicha dificultad. En esta situación se cumple que:

$$\partial_t u = \frac{(1-p)}{|\partial_x u|^p} \partial_{xx} u \quad (6)$$

El primer inconveniente es que la ecuación no está acotada cuando el gradiente se aproxima a cero. El segundo, surge porque el coeficiente de  $\partial_{xx} u$  toma valores negativos, lo cual da pie a una ecuación evolutiva *regresiva* con problemas de estabilidad para tiempos acotados[7]. Por tanto la localización de una solución exacta y continua al problema planteado es complicada. Una aproximación a este tipo de ecuaciones se puede encontrar en Tsurkov[19] con técnicas ya empleadas en modelos de *medios porosos* y de una manera más clara y precisa en Barenblatt y Vázquez[3] que se plantean soluciones a ecuaciones similares a (6) pero con coeficiente positivo.

### 2.1 FORMULACIÓN SEMIDISCRETA

Es conocido que problemas no correctamente planteados en el caso continuo, sí pueden ser estudiados con cierto éxito en el caso semidiscreto y discreto[9, 21]. En este sentido, una discretización espacial de la ecuación (2) unidimensional con la función de difusión uniparamétrica (6) se obtiene utilizando la habitual aproximación progresiva y regresiva compensada de la derivada[14]. De este modo, resulta un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo:

$$\dot{u}_i(t) = h^{p-2} \left[ \frac{u_{i+1} - u_i}{|u_{i+1} - u_i|^p} - \frac{u_i - u_{i-1}}{|u_i - u_{i-1}|^p} \right] \quad (7)$$

con  $i = 2, \dots, n-1$  y donde  $h \equiv \Delta x$  representa la discretización espacial. Su expresión puede ser puesta en función de la expresión discreta del coeficiente de difusión  $g$  [21]:

$$\dot{u}_i(t) = h^{p-2} \left[ g_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1} - u_i) - g_{i-\frac{1}{2}}(u_i - u_{i-1}) \right] \quad (8)$$

con  $i = 2, \dots, n-1$  y siendo:

$$g_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{|u_{i+1} - u_i|^p}; \quad g_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|u_i - u_{i-1}|^p} \quad (9)$$

La expresión (8) permite una conexión con los métodos numéricos conservativos[10]. Reorganizando el sistema (8) se llega a una expresión diferencial ordinaria autónoma matricial del tipo

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{u}(t)) \mathbf{u}(t) \quad (10)$$

siendo los coeficientes para  $i = 2, \dots, n-1$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} h^{p-2}g_{i\pm\frac{1}{2}} & \text{si } j = i \pm 1 \\ -h^{p-2}(g_{i+\frac{1}{2}} + g_{i-\frac{1}{2}}) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (11)$$

Y aplicando las condiciones de contorno ya establecidas en (2):

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{h^{p-2}}{|u_2 - u_1|^p} & a_{12} &= \frac{h^{p-2}}{|u_2 - u_1|^p} \\ a_{nn-1} &= \frac{h^{p-2}}{|u_n - u_{n-1}|^p} & a_{nn} &= -\frac{h^{p-2}}{|u_n - u_{n-1}|^p} \end{aligned} \quad (12)$$

La generalización a más dimensiones es directa pues la ecuación (1) se escribe

$$\partial_t u = \sum_{r=1}^n \partial_{x_r} (g(\|\nabla u\|) \partial_{x_r} u) \quad (14)$$

De esta manera el caso semidiscreto toma la forma

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) = \sum_{r=1}^n \mathbf{A}_r(\mathbf{u}(t)) \mathbf{u}(t) \quad (15)$$

donde los coeficientes de la matriz  $\mathbf{A}_r(\mathbf{u}(t))$  son:

$$a_{ijr} = \begin{cases} h_r^{p-2}g_{i\pm\frac{1}{2}} & \text{si } j = i \pm 1 \\ -\sum_{r=1}^n h_r^{p-2}(g_{i+\frac{1}{2}} + g_{i-\frac{1}{2}}) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (16)$$

### 3 SOLUCIONES EVOLUTIVAS PARA FUNCIONES UNIPARAMÉTRICAS DE REALCE

#### 3.1 ANTECEDENTES

La formulación semidiscreta (7) o (10) de la ecuación (1), plantea una singularidad sobre el sistema para valores del gradiente próximos a cero. Una manera de evitar esta situación consiste en introducir una constante positiva  $\varepsilon$  que tienda a cero [4]. Esta regularización lleva a considerar una nueva función de difusión

$$g_\varepsilon(s) = \frac{1}{(s + \varepsilon)^p} \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \text{ con } s \geq 0 \quad (17)$$

cumpliendo  $g_\varepsilon \rightarrow g$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Con esta regularización planteada, se está dentro del marco de *escala-espacio no lineal* admisible planteado por Weickert[20], para asegurar la existencia de una solución numérica estable al problema. A partir de aquí, se plantea la discretización total del problema. La utilización de un esquema explícito lleva consigo la condición de estabilidad [20, 22]

$$\Delta t = \frac{\varepsilon^p}{2N} \quad (18)$$

siendo  $N$  la dimensión del espacio. Esta solución numérica obliga a considerar incrementos de tiempo  $\Delta t$  muy bajos si el valor de la constante de estabilización  $\varepsilon$  es pequeño. Por el contrario, si se aumenta  $\Delta t$ , se produce una pérdida de consistencia en la solución numérica; como una opción de compromiso se sitúa a  $\varepsilon = 10^{-3}$  [4]. Una manera eficiente de evitar esta restricción sobre el incremento de tiempo, consiste en considerar el algoritmo *semi-implícito* AOS [22]. En este sentido trabajos sobre el comportamiento de este esquema sobre la funciones de difusión uniparamétricas pueden verse en [12, 4].

Otro manera de proceder es considerar el efecto de las ecuaciones (7) en un número limitado de píxeles, para después generalizar el resultado a todos los demás. Este método tendría la ventaja inicial de obtener una solución semidiscreta explícita, sin necesidad además de introducir un parámetro de regularización  $\varepsilon$  positivo. De hecho, el marco de *escala-espacio no lineal* anteriormente expuesto, nos plantea la existencia de una solución aproximada, pero no se calcula explícitamente. Su solución se determina a partir de esquemas totalmente discretos ya comentados. Así pues, inicialmente se considera el *método de los Dos Píxeles* (*Two-Pixel Signal Method*) [16, 4] introducido a partir del método *Soft Haar Wavelet Shrinkage of Two-Pixel Signals*. Este procedimiento se basa inicialmente en establecer un modelo conservativo entre los dos píxeles que emule el equilibrio de transferencia de energía en el proceso de difusión. Sin pérdida de generalidad, se considera inicialmente sólo el intercambio de energía entre los píxeles  $i$  e  $i+1$ :

$$\dot{u}_i = 2h^{p-2} \frac{u_{i+1} - u_i}{|u_{i+1} - u_i|^p} \quad (19a)$$

$$\dot{u}_{i+1} = -2h^{p-2} \frac{u_{i+1} - u_i}{|u_{i+1} - u_i|^p} \quad (19b)$$

$$\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1} = 0 \quad (19c)$$

En el planteamiento establecido en [16] el valor de 2 de las ecuaciones anteriores no aparecía. Sin embargo, a la hora de proceder a la discretización completa, duplica el incremento de tiempo, siguiendo un procedimiento de tres pasos inspirada

en la *cycle spinning technique*. Esto es necesario para lograr la consistencia y así la convergencia del método discreto[14]. Por otra parte Welt *et al*[23] ya inicialmente parten de la ecuación (7).

### 3.2 ESQUEMA DE TRES PÍXELES

Nosotros planteamos la necesidad de tratar inicialmente con tres píxeles. Esto permite considerar de forma más directa la influencia de los píxeles de los extremos sobre el píxel central. Sin pérdida de generalidad se consideran los píxeles  $i-1$ ,  $i$  e  $i+1$  para los que (7) se escribe

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_{i-1} &= \frac{1}{\alpha} \frac{u_i - u_{i-1}}{|u_i - u_{i-1}|^p} \\ \dot{u}_i^- &= -\frac{1}{\alpha} \frac{u_i - u_{i-1}}{|u_i - u_{i-1}|^p} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

con la condición  $\dot{u}_{i-1} + \dot{u}_i^- = 0$ , que mide el efecto de los píxeles  $i-1$  e  $i$  y posteriormente el efecto del píxel  $i+1$  dando lugar al sistema:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_i^+ &= \frac{1}{1-\alpha} \frac{u_{i+1} - u_i}{|u_{i+1} - u_i|^p} \\ \dot{u}_{i+1} &= -\frac{1}{1-\alpha} \frac{u_{i+1} - u_i}{|u_{i+1} - u_i|^p} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

con la condición  $\dot{u}_{i+1} + \dot{u}_i^+ = 0$ .

La solución buscada debe ser una ponderación de ambos efectos. Así pues, se establece que el intercambio de energía sobre el píxel  $i$  no sólo es debido al efecto de  $i-1$  sino también de  $i+1$ . El valor final debe ser una ponderación de los efectos de los píxeles de los extremos, por lo que se considera:

$$u_i = \alpha u_i^- + (1-\alpha) u_i^+ \quad (22)$$

donde  $u_i^-$  y  $u_i^+$  son las soluciones de los sistemas anteriores para el píxel  $i$ . Los coeficientes de  $1/\alpha$  y de  $1/(1-\alpha)$  que aparecen en los sistemas de ecuaciones (20) y (21), son necesarios para poder establecer la consistencia de las soluciones semi-discretas como se verá más adelante. Se aborda inicialmente la solución de  $u_i^+$ . Siguiendo [16], se define primeramente la diferencia de niveles de grises entre los dos píxeles adyacentes, mediante la función

$$w(t) = u_{i+1} - u_i \quad (23)$$

De esta manera, la evolución discreta de las pendientes  $\partial_t(\partial_x u)$  se puede expresar mediante la ecuación diferencial:

$$\dot{w}(t) = -\frac{2h^{p-2}}{1-\alpha} \frac{w(t)}{|w(t)|^p} \quad (24)$$

$$w(0) = u_{i+1}(0) - u_i(0) = f_{i+1} - f_i$$

Es evidente que la parte derecha no está definida para  $w(t) = 0$ . Sin embargo, desde el punto de vista de la analogía física cuando los dos píxeles

tienen el mismo nivel de gris, no debería de haber transferencia de energía. Por tanto, se considera que  $w(t)$  es una solución de (24), si se trata de una función *absolutamente continua* que verifica la ecuación evolutiva:

$$w(t) \stackrel{\text{c.t.p.}}{=} \begin{cases} -\frac{2h^{p-2}}{1-\alpha} \frac{w(t)}{|w(t)|^p} & \text{si } |w(t)| \neq 0 \\ 0 & \text{si } |w(t)| = 0 \end{cases}$$

$$w(0) = f_{i+1} - f_i \quad (\text{Condiciones iniciales}) \quad (25)$$

*casi para todo punto (c.t.p.)* en  $(0, +\infty)$ . El proceso de resolución de esta ecuación diferencial dependerá del signo de  $w(t)$  y de las condiciones iniciales, obteniéndose

$$w(t) = w(0) \left[ 1 - \frac{2tp h^{p-2}}{(1-\alpha)|w(0)|^p} \right]^{1/p} \quad (26)$$

si  $0 < t < \frac{(1-\alpha)|w(0)|^p}{2p h^{p-2}}$  pero  $w(t) = 0$  si

$$t \geq \frac{(1-\alpha)|w(0)|^p}{2p h^{p-2}}$$

A partir de (26) y centrándose en el píxel  $i$  es posible definir la dinámica del nivel de gris en este proceso evolutivo [14]

$$u_i^+(t) = \mu_i + \left[ 1 - \frac{2tp h^{p-2}}{(1-\alpha)|f_{i+1} - f_i|^p} \right]^{1/p} (f_i - \mu_i)$$

si

$$0 < t < \frac{(1-\alpha)|f_{i+1} - f_i|^p}{2p h^{p-2}}$$

y

$$u_i^+(t) = \mu_i \quad \text{si } t \geq \frac{(1-\alpha)|f_{i+1} - f_i|^p}{2p h^{p-2}}$$

donde  $\mu_i = \frac{f_{i+1} + f_i}{2}$ . Análogamente:

$$u_i^-(t) = \mu_{i-1} + \left[ 1 - \frac{2tp h^{p-2}}{\alpha|f_i - f_{i-1}|^p} \right]^{1/p} (f_i - \mu_{i-1})$$

si

$$0 < t < \frac{\alpha|f_i - f_{i-1}|^p}{2p h^{p-2}}$$

y

$$u_i^-(t) = \mu_{i-1} \quad \text{si } t \geq \frac{\alpha|f_i - f_{i-1}|^p}{2p h^{p-2}}$$

donde  $\mu_{i-1} = \frac{f_i + f_{i-1}}{2}$ . Con estas funciones se construye la función buscada:

$$u_i(t) = \alpha u_i^-(t) + (1-\alpha) u_i^+(t) \quad (27)$$

El siguiente paso es comprobar que esta solución  $u_i(t)$  es *consistente* (i.e. ‘se ajusta’) con el sistema de ecuaciones (7) para el tiempo

$$0 < t < \min \left( \frac{\alpha|f_i - f_{i-1}|^p}{2p h^{p-2}}, \frac{(1-\alpha)|f_{i+1} - f_i|^p}{2p h^{p-2}} \right) \quad (28)$$

En efecto, al derivar  $u_i^-$  resulta

$$\dot{u}_i^- = -(1/\alpha)h^{p-2} \cdot \frac{[|f_i - f_{i-1}|^p - (2/\alpha)tph^{p-2}]^{1/p}}{[|f_i - f_{i-1}|^p - (2/\alpha)tph^{p-2}]} \cdot \frac{f_i - f_{i-1}}{|f_i - f_{i-1}|} \quad (29)$$

además también se cumple que:

$$\frac{u_i^- - u_{i-1}}{|u_i^- - u_{i-1}|^p} = \frac{[|f_i - f_{i-1}|^p - (2/\alpha)tph^{p-2}]^{1/p}}{[|f_i - f_{i-1}|^p - (2/\alpha)tph^{p-2}]} \cdot \frac{f_i - f_{i-1}}{|f_i - f_{i-1}|} \quad (30)$$

con lo cual:

$$\dot{u}_i^- = -(1/\alpha)h^{p-2} \frac{u_i^- - u_{i-1}}{|u_i^- - u_{i-1}|^p} \quad (31)$$

y de manera análoga se obtiene el resultado para  $u_i^+$

$$\dot{u}_i^+ = \frac{h^{p-2}}{1-\alpha} \frac{u_{i+1} - u_i^+}{|u_{i+1} - u_i^+|^p} \quad (32)$$

y de esta forma:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(t) &= \alpha \dot{u}_i^-(t) + (1-\alpha) \dot{u}_i^+(t) \\ &= h^{p-2} \left[ \frac{u_{i+1} - u_i^+}{|u_{i+1} - u_i^+|^p} - \frac{u_i^- - u_{i-1}}{|u_i^- - u_{i-1}|^p} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

se aproxima al sistema de ecuaciones (7). Es inmediato que para  $\alpha = 1/2$  se recupera el *método de Dos píxeles*[16].

### 3.2.1 Características

En la expresión (28) se relaciona el tiempo, el valor de  $p$  y del módulo del gradiente discreto. Este hecho es importante ya que permite determinar en función de  $p$  y del módulo del gradiente, los tiempos de difusión no lineal y al revés: dado un tiempo y un valor de  $p$ , se calcula qué orden de pendiente (incremento del gradiente discreto), se puede esperar en una difusión no lineal. Como ejemplo en la tabla 1, se aprecia, para un tiempo

Tabla 1: Pendientes en función de  $p$  para  $t = 0.1$ .

$p$	1.2	1.5	1.8	2	2.5
Pend.	0.542	0.7113	0.8333	0.8944	1

$t = 0.1$ , los valores mínimos de pendiente a partir de los cuales se producirá una difusión no lineal. En ella se observa además, que a medida que aumenta el valor de  $p$ , los valores de las pendientes

Tabla 2: Tiempos en función de  $p$  para  $s = 0.1$ .

$p$	1.2	1.5	1.8	2	2.5
Tiempo	0.01312	0.0051	0.0021	0.00125	0.0003

aumentan, con lo cual la difusión no lineal queda restringida, para los valores mayores de las pendientes. Por otra parte, en la tabla 2 se ha fijado un valor de la pendiente  $s = 0.1$ . Se observa que a medida que aumenta el valor de  $p$ , los valores del tiempo disminuyen de forma apreciable. Esto supondrá cierto inconveniente pues será necesario aumentar el coste computacional.

### 3.3 DISCRETIZACIÓN COMPLETA

A continuación se trata de obtener un esquema numérico a partir de la solución *semi-analítica* del proceso de difusión no lineal propuesta en (27). La ventaja de esta discretización es que no precisa de un parámetro de regularización  $\varepsilon$  sobre la función de difusión que pueda modificar la consistencia el sistema de ecuaciones que pretende resolverse. El proceso a seguir es similar al planteado para determinar la solución semi-analítica: se considera las intensidades lumínicas entre  $u_{i+1}$  y  $u_i$ , para posteriormente, hacer el mismo proceso entre  $u_i$  y  $u_{i-1}$ . Por último se ponderan los valores obtenidos. Para simplificar las expresiones y las notaciones, se toma el valor  $\alpha = 1/2$ , aunque de forma análoga se podría desarrollarse arrastrando los factores  $\alpha$  y  $(1-\alpha)$  de la soluciones ya obtenidas en (27). Así pues, se considera inicialmente el intervalo  $(u_i, u_{i+1})$ . En este caso a partir de las ecuaciones (21) y una vez discretizado explícitamente respecto del tiempo, se tiene

$$u_i^{n+1} = u_i^n + 2kh^{p-2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{|u_{i+1}^n - u_i^n|^p} \quad (34)$$

$$u_{i+1}^{n+1} = u_{i+1}^n - 2kh^{p-2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{|u_{i+1}^n - u_i^n|^p} \quad (35)$$

con lo cual siempre que  $|u_{i+1}^n - u_i^n| \neq 0$  puede establecerse:

$$w_i^{n+1} = u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = u_{i+1}^n - u_i^n - 4kh^{p-2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{|u_{i+1}^n - u_i^n|^p} \quad (36)$$

Si  $u_{i+1}^n - u_i^n > 0$  entonces implica que

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} > 0 \text{ siempre que } \frac{(u_{i+1}^n - u_i^n)^p}{4h^{p-2}} > k \quad (37)$$

Si sucede que

$$4h^{p-2}k = (u_{i+1}^n - u_i^n)^p$$

entonces:

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = 0 \implies u_{i+1}^{n+1} = u_i^{n+1}$$

además se cumple por (21) que

$$u_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1} = u_{i+1}^n + u_i^n$$

con lo cual

$$u_{i+1}^{n+1} = \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2} \quad \text{y} \quad u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2}$$

Si se da la situación

$$4 h^{p-2} k > (u_{i+1}^n - u_i^n)^p \text{ entonces } u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} < 0$$

lo que implica que ya no puede utilizarse el esquema (36) en la siguiente iteración y además no se ajustaría a la solución semi-analítica (25) que se pretende discretizar. Realmente un valor negativo no tendría sentido ‘físicamente’, pues si la imagen tiende a suavizarse (disminuye  $w$ ) carece de sentido que vuelva a aumentar (esto es, se haga un realce en sentido opuesto). Así pues, es coherente considerar en este caso

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = 0$$

Haciendo un razonamiento análogo para el caso  $u_{i+1}^n - u_i^n < 0$  se llega a la expresión

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = u_{i+1}^n - u_i^n - 4kh^{p-2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{|u_{i+1}^n - u_i^n|^p} \min \left( 1, \frac{|u_{i+1}^n - u_i^n|^p}{4kh^{p-2}} \right) \quad (38)$$

Para despejar el término  $u_i^{n+1}$  de nuevo es necesario tener en cuenta que  $u_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1} = u_{i+1}^n + u_i^n$ . Esto permite concretar el valor de  $u_i^{n+1}$  como

$$(u_i^{n+1})^+ \equiv u_i^{n+1} = u_i^n + 2kh^{p-2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{|u_{i+1}^n - u_i^n|^p} \cdot \min \left( 1, \frac{|u_{i+1}^n - u_i^n|^p}{4kh^{p-2}} \right) \quad (39)$$

Análogamente se obtendría un resultado para la discretización del sistema (20) dando lugar a

$$(u_i^{n+1})^- \equiv u_i^{n+1} = u_i^n - 2kh^{p-2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{|u_i^n - u_{i-1}^n|^p} \cdot \min \left( 1, \frac{|u_i^n - u_{i-1}^n|^p}{4kh^{p-2}} \right) \quad (40)$$

Se obtiene así la solución

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_i^{n+1})^- + \frac{1}{2}(u_i^{n+1})^+ = u_i^n + kh^{p-2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{|u_{i+1}^n - u_i^n|^p} \cdot \min \left( 1, \frac{|u_{i+1}^n - u_i^n|^p}{4kh^{p-2}} \right) - kh^{p-2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{|u_i^n - u_{i-1}^n|^p} \cdot \min \left( 1, \frac{|u_i^n - u_{i-1}^n|^p}{4kh^{p-2}} \right) \quad (41)$$

### 3.3.1 Convergencia

La estabilidad del esquema (41) queda asegurada a partir de (39) y (40) pues

$$\min(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n) \leq u_i^{n+1} \leq \max(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$$

De esta forma con la condición inicial  $u_i^0 = f_i$  para  $i = 0, \dots, N-1$  se sigue que el *esquema tres píxeles* (41) cumple el *principio máximo-mínimo*:

$$\min_i f_i \leq u_i^{n+1} \leq \max_i f_i$$

para  $i = 0, \dots, N-1$  y todas las iteraciones temporales  $n = 0, 1, \dots$ , y para cualquier incremento de tiempo  $k > 0$ . Esto muestra que el esquema es *absolutamente estable* con la norma del máximo.

La consistencia del esquema queda asegurada por la consistencia de las soluciones semi-analíticas ya probada en (33). No obstante esto puede confirmarse en el caso discreto. En efecto, si

$$k \leq \frac{1}{4h^{p-2}} \min(|u_{i+1}^n - u_i^n|^p, |u_i^n - u_{i-1}^n|^p) \quad (42)$$

y resulta el esquema explícito

$$u_i^{n+1} = u_i^n + k h^{p-2} \left[ \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{|u_{i+1}^n - u_i^n|^p} - \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{|u_i^n - u_{i-1}^n|^p} \right] \quad (43)$$

correspondiente al sistema (7)

## 4 NUMÉRICO-EXPERIMENTAL

Para verificar la propuesta de solución semi-analítica del método de los tres píxeles se han hecho una serie de ensayos numéricos y se han comparado con los obtenidos mediante técnicas de regularización y utilizando esquemas semi-implícitos [22, 15, 12]. Cada figura corresponde a diferentes valores de  $p$ . Asociado a cada gráfico en las respectivas figuras se asocia el cuadro NINLI, que corresponden a las iteraciones de difusión no lineal realizadas por el algoritmo semi-analítico de *tres píxeles* propuesto. En los casos en los que este gráfico, llamado NINLI, corresponde a una línea horizontal quiere decir que las pendientes no eran suficientemente grandes como para establecer una difusión no lineal. En otros casos cuando aparece, indica que las pendientes eran suficientemente significativas como para establecer un realce no lineal. La curva de color rojo corresponde a la modelización del borde de la imagen. En alguna de ellas, tiende a ser más *plana* para indicar un mayor emborronamiento de la imagen (caso más desfavorable)

## 5 CONCLUSIONES

El *método de los tres píxeles* nos proporciona una solución semi-analítica explícita a partir del sis-

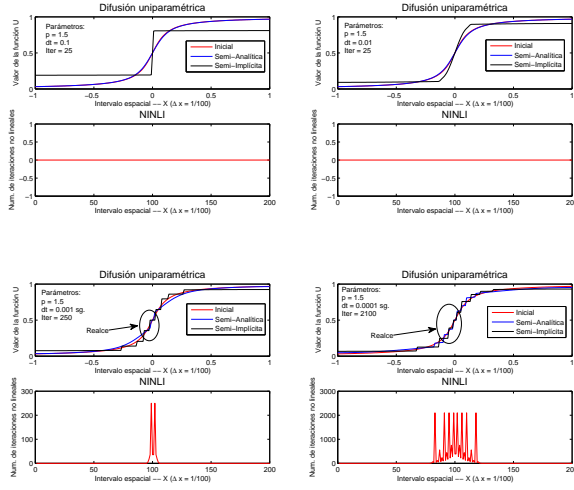


Figura 1: Estudio con  $p = 1.5$

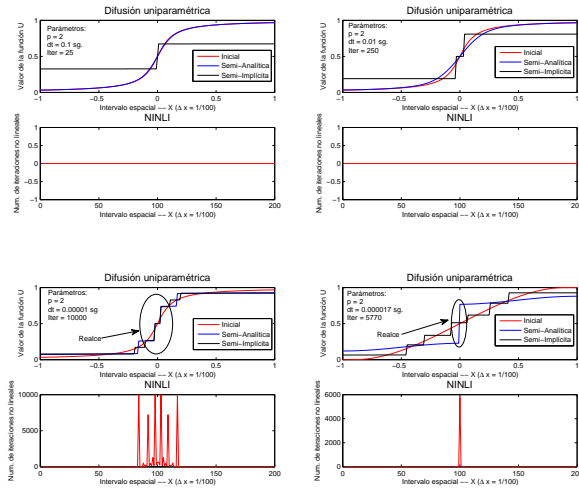


Figura 2: Estudio con  $p = 2$

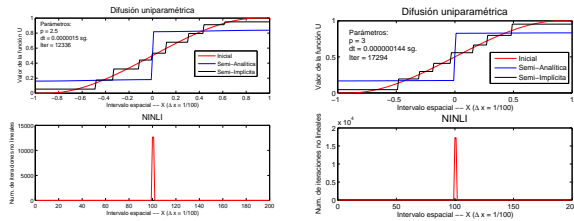


Figura 3: Estudio con diferentes  $p > 2$

tema de ecuaciones (7). Este método plantea la ventaja, desde el punto de vista teórico que aborda la solución del sistema de ecuaciones sin ningún tipo de regularización sobre la función de difusión uniparamétrica (3). Aunque, desde el punto de vista discreto, las limitaciones sobre el incremento de tiempo, para obtener una difusión no lineal pueden ser significativas, también es cierto, que el realce es más preciso, minimizando el efecto escalera en ciertas ocasiones, incluso cuando el borde está más emborronado (la pendiente del borde es menor como muestran la figura 2 y figura 3), se aprecia un mejor realce que el caso semi-implícito. Por ello, este método se puede presentar como alternativa al método de regularización cuando sea necesario una mayor precisión en el realce en bordes más difusos, a costa de un mayor coste computacional.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la financiación del proyecto DPI2007-63654

## Referencias

- [1] F. Andreu, V. Caselles, J. Díaz, and J. Mazón. Some qualitative properties for the total variation flow. *Journal of Functional Analysis*, 188:516–547, 2002.
- [2] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing. Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. Springer-Verlag, 2002.
- [3] G. I. Barenblatt and J. L. Vázquez. Non-linear diffusion and image contour enhancement. *Interfaces and Free Boundaries*, 6:31–54, 2004.
- [4] T. Brox. From pixels to regions: Partial differential equations in image analysis, 2005.
- [5] A. Buades, B. Coll, and J. M. Morel. A review of image denoising algorithms with a new one. *Multiscale Modeling & Simulation*, 4:490–530, 2005.
- [6] F. Catte, P. L. Lions, J. M. Morel, and T. Coll. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 29(1):182–193, 1992.
- [7] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [8] S. L. Keeling and R. Stollberger. Nonlinear anisotropic diffusion filters for wide range

- edge sharpening. *Inverse Problems*, 18:175–190, 2002.
- [9] S. Kichenassamy. The perona-malik paradox. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 57(5):1328–1342, 1997.
- [10] R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser Verlag, 1992.
- [11] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transaction on pattern analysis and machine intelligence*, 12(7):629–639, 1990.
- [12] P. Platero, J. Sanguino, M. C. Tobar, P. M. González, G. Asensio, and J. M. Poncela. Agrupación natural de los píxeles. *XXVI Jornadas de Automática (Almería, 6-8 septiembre)*, pages 788–795, 2006.
- [13] J. Sanguino. Evolución de curvas y el laplaciano orientado. *Documento interno (Grupo de Bioingeniería de la U.P.M.)*, 2005.
- [14] J. Sanguino. Estudio de esquemas semi-discretos para familias uniparamétricas de difusión. *Documento interno (Grupo de Bioingeniería de la U.P.M.)*, 2008.
- [15] J. Sanguino, C. Platero, P. M. González, J. M. Poncela, and M. C. Tobar. Aplicaciones de una familia de difusión anisotrópica sobre la evolución de algunos contornos activos. *XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (Sevilla - Septiembre 2007)*, Septiembre 2007.
- [16] G. Steidl, J. Weickert, T. Brox, P. Mrázek, and M. Welk. On the equivalence of soft wavelet shrinkage, total variation diffusion, total variation regularization, and sides. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 42(2):686–713, 2004.
- [17] S. Teboul, L. Blanc-Feraud, G. Aubert, and M. Barlaud. Variational approach for edge-preserving regularization using couple pdes. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7:387–397, 1998.
- [18] D. Tschumperlé. Pde’s based regularization of multivalued images and applications, 2002.
- [19] V. I. Tsurkov. An analytical model of edge protection under noise suppression by anisotropic diffusion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 39(3):437–440, 2000.
- [20] J. Weickert. Anisotropic diffusion in image processing, 1996.
- [21] J. Weickert and B. Benhamouda. A semidiscrete nonlinear scale-space theory and its relation to the perona-malik paradox. *Advances in Computer Vision*, pages 1–10, 1997.
- [22] J. Weickert, B.M. ter Haar Romeny, and M. A. Viergever. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3):398–410, 1998.
- [23] M. Welk, G. Steidl, and J. Weickert. Locally analytic schemes: A link between diffusion filtering and wavelet shrinkage. *IMA Preprint Series No.2100 (University of Minnesota)*, 2006.